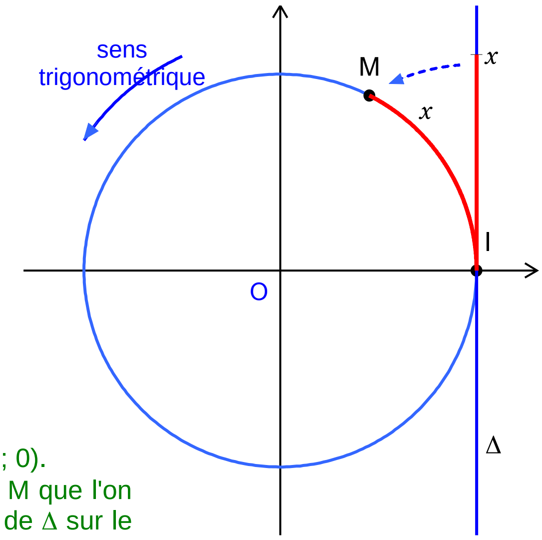
TRIGONOMÉTRIE

I Cercle trigonométrique - Radian



Définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1, sur lequel on définit un sens de parcours appelé sens trigonométrique et correspondant au sens inverse des aiguilles d'une montre.

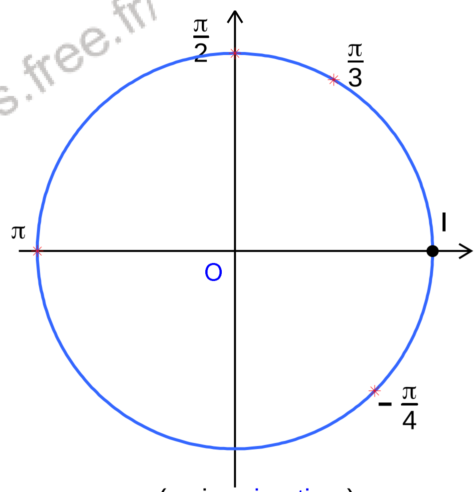
Remarques

- Le périmètre du cercle trigonométrique est égal à 2π.
- On considère la droite graduée Δ tangente au cercle en I(1 ; 0).
  Pour un réel x repéré sur la droite Δ, on considère le point M que l'on obtiendrait sur le cercle trigonométrique par "enroulement" de Δ sur le cercle. On dit que M est l'image sur le cercle du réel x.

Exemples (voir animation)

Le périmètre du cercle trigonométrique étant égal à 2π,

- le point correspondant à π est obtenu en parcourant, dans le sens trigonométrique, un demi-cercle à partir de I.
- le point correspondant à $\frac{\pi}{2}$ est obtenu en parcourant, dans le sens trigonométrique, la moitié d'un demi-cercle à partir de I.
- le point correspondant à $\frac{\pi}{3}$ est obtenu en parcourant, dans le sens trigonométrique, le tiers d'un demi-cercle à partir de I.
- le point correspondant à $-\frac{\pi}{4}$ est obtenu en parcourant, dans le sens inverse du sens trigonométrique (appelé sens rétrograde), le quart d'un demi-cercle à partir de I.



Exercice 01 (voir réponses et correction) (voir animation)

Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondant à
0 ; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\pi$; 2π

Exercice 02 (voir réponses et correction) (voir animation)

Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondant à
$-\frac{\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{4}$; 12π ; $\frac{9\pi}{2}$; $\frac{\pi}{12}$; 15π ; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{3}$

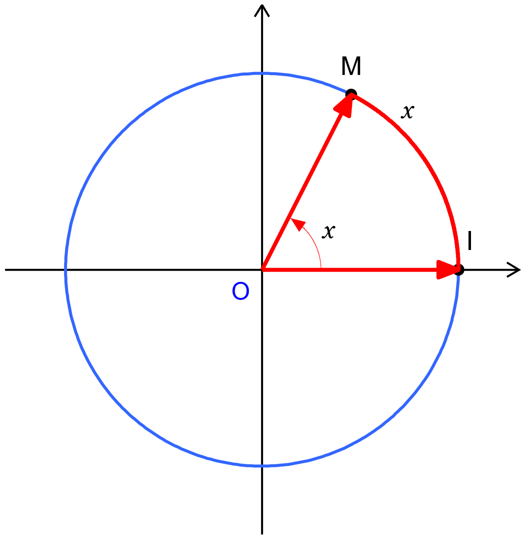
Exercice 03 (voir réponses et correction) (voir animation)

Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondant à
$\frac{4\pi}{3}$; -21π ; $-\frac{9\pi}{4}$; $\frac{23\pi}{6}$; $-\frac{17\pi}{3}$; $\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{121\pi}{2}$; 1620π

II Angles orientés - Mesures

Définition

On considère sur le cercle trigonométrique, le point M image du réel x.
On dit que x est une mesure en radians de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})}$ noté plus simplement $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$.



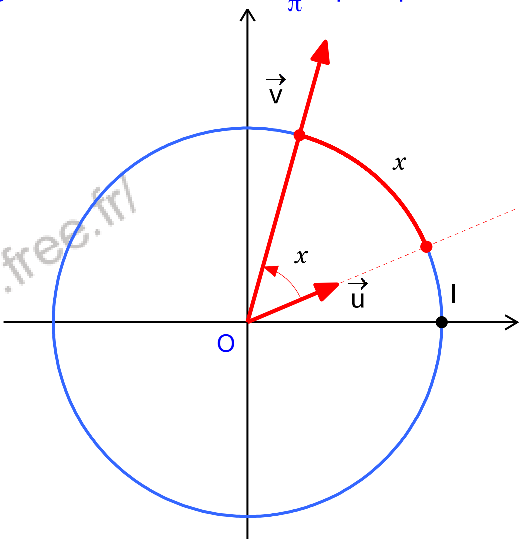
Correspondances

degrés	360°	180°	90°	60°	45°	30°	0
radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Les mesures d'un angle en degrés et en radians sont proportionnelles.
Le coefficient de proportionnalité est de $\frac{\pi}{180}$ pour passer des degrés aux radians et de $\frac{180}{\pi}$ pour passer des radians aux degrés.

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls déterminent un angle orienté noté $(\vec{u}\,;\vec{v})$.
En considérant un cercle trigonométrique, on définit une mesure x en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$.



Remarque

Si k et k' sont des réels strictement positifs, les mesures des angles $(k\vec{u}\,;k'\vec{v})$ et $(\vec{u}\,;\vec{v})$ sont identiques.

Propriété (admise)

Soit $(\vec{u}\,;\vec{v})$ un angle orienté et x une mesure en radians de $(\vec{u}\,;\vec{v})$.
L'ensemble des mesures de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est l'ensemble des réels $x + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
c'est-à-dire qu'un angle est mesuré à un certain nombre de tours de cercle près. (l'entier k représente ce nombre de tours)
L'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ a une et une seule mesure dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$, cette mesure est appelée mesure principale de l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

Remarques

- On assimilera souvent un angle orienté à ses mesures.
  Ainsi on pourra écrire $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$ ou $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
  on n'écrira jamais $\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$ qui est une égalité fausse entre deux réels mais $\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}\ [2\pi]$.
- Pour que deux réels x et y soient des mesures du même angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$, il faut et il suffit que $y - x$ soit un multiple entier de 2π (c'est-à-dire $y - x = k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$).
  On écrira $y - x = 0\ [2\pi]$ ou $y = x\ [2\pi]$

Exercice 04 (voir réponses et correction)

Déterminer les mesures principales des angles dont les mesures sont :
$\frac{7\pi}{6}$; $\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{15\pi}{8}$; $-\frac{10\pi}{3}$; $\frac{83\pi}{4}$; $\frac{131\pi}{6}$; $\frac{253\pi}{12}$

Exercice 05 (voir réponses et correction) (voir animation)

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 tels que :

$OM_1 = 2$ et $(\vec{i};\overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{4}$ $OM_2 = 3$ et $(\vec{i};\overrightarrow{OM_2}) = \frac{11\pi}{6}$

$OM_3 = \frac{1}{2}$ et $(\vec{i};\overrightarrow{OM_3}) = \frac{3\pi}{4}$ $OM_4 = \sqrt{2}$ et $(\vec{i};\overrightarrow{OM_4}) = \frac{7\pi}{3}$

Exercice 06 (voir réponses et correction)

Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = +\frac{\pi}{2}$ (on dit que ABCD est un carré direct).

Déterminer une mesure (en radians) de chacun des angles (aucune justification n'est demandée) :

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA})$; $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC})$

$(\overrightarrow{CO};\overrightarrow{DA})$; $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{CB})$

Propriétés (voir justification 01)

- Pour tout vecteur non nul $\vec{u}$, on a :
  $(\vec{u};\vec{u}) = 0\ [2\pi]$; $(\vec{u};-\vec{u}) = \pi\ [2\pi]$
- Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, on a :
  $(\vec{v};\vec{u}) = -(\vec{u};\vec{v})$; $(-\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})$; $(\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi\ [2\pi]$
  et si k et k' sont deux réels strictement positifs $(k\vec{u};k'\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})$
- Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
  $(\vec{u};\vec{v}) + (\vec{v};\vec{w}) = (\vec{u};\vec{w})$ (Relation de Chasles)

Propriétés (voir justification 02)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens $\Leftrightarrow$ $(\vec{u};\vec{v}) = 0\ [2\pi]$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire $\Leftrightarrow$ $(\vec{u};\vec{v}) = \pi\ [2\pi]$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $(\vec{u};\vec{v}) = 0\ [\pi]$ c'est-à-dire $(\vec{u};\vec{v}) = 0 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 07 (voir réponses et correction)

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Déterminer $(\vec{u};-\vec{v})$; $(-\vec{u};\vec{v})$; $(\vec{v};-\vec{u})$; $(-\vec{u};-\vec{v})$; $\left(-3\vec{v};\frac{1}{2}\vec{u}\right)$

Exercice 08 (voir réponses et correction)

1°) Soit ABC un triangle.

Démontrer que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \pi\ [2\pi]$.

2°) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Montrer qu'il n'est pas possible d'avoir $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) = +\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

En déduire que $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Justifier de même que $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

3°) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Soient A′, B′ ; C′ les milieux respectifs de [BC] ; [AC] ; [AB].

Déterminer $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BA'})$; $(\overrightarrow{CA'};\overrightarrow{CB'})$; $(\overrightarrow{A'C};\overrightarrow{C'A})$; $(\overrightarrow{B'A};\overrightarrow{C'B})$ (on justifiera)

III Cosinus et sinus d'un nombre réel

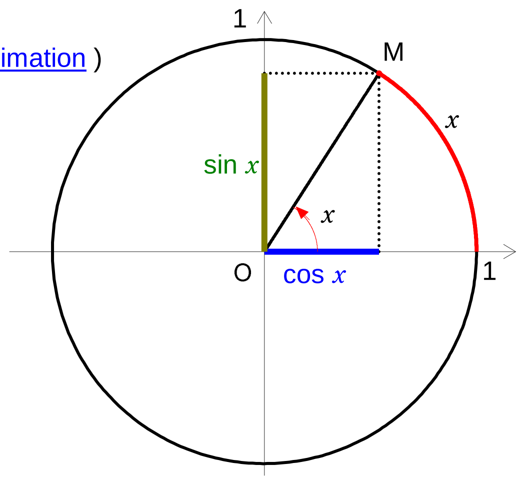
Définition

(voir animation)

On dit qu'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ est direct lorsque $(\vec{i}\ ;\vec{j}) = +\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, si M est le point du cercle trigonométrique image du réel x,

- l'abscisse de M est appelée cosinus de x, elle est notée $\cos(x)$ ou $\cos x$.
- l'ordonnée de M est appelée sinus de x, elle est notée $\sin(x)$ ou $\sin x$.



Exercice 09

(voir réponses et correction)

Donner les valeurs de :

$\cos 0$; $\sin 0$; $\cos\frac{\pi}{2}$; $\sin\frac{\pi}{2}$; $\cos\pi$; $\sin\pi$; $\cos\frac{3\pi}{2}$; $\sin\frac{3\pi}{2}$; $\cos 2\pi$; $\sin 2\pi$; $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Propriétés

(voir démonstration 03)

Pour tout réel x, on a : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$; $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(L'expression $\cos^2 x$ désigne le carré de $\cos x$ c'est-à-dire $(\cos x)^2$ et de même $\sin^2 x$ désigne $(\sin x)^2$)

Exercice 10

(voir réponses et correction)

x est un réel tel que $0 \leqslant x \leqslant \pi$ et $\cos x = \frac{1}{3}$. Calculer la valeur de $\sin x$.

x est un réel tel que $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $\sin x = -\frac{1}{4}$. Calculer la valeur de $\cos x$.

x est un réel tel que $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ et $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Calculer la valeur de $\sin x$.

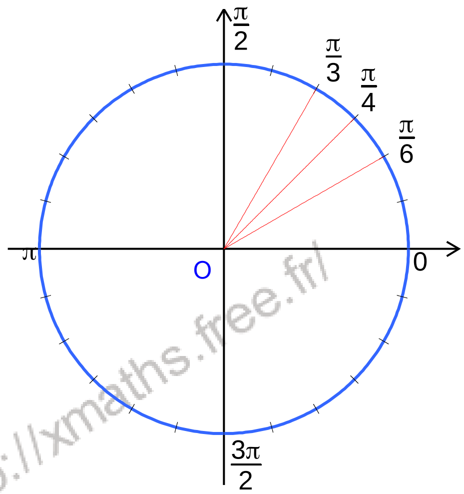
x est un réel tel que $0 \leqslant x \leqslant \pi$ et $\sin x = \sqrt{3}$. Calculer la valeur de $\cos x$.

Valeurs particulières

(voir démonstration 04)

(voir animation)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1



Définition

On appelle fonction cosinus la fonction : $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$

On appelle fonction sinus la fonction : $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$

Propriétés

(voir démonstration 05)

Pour tout réel x : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

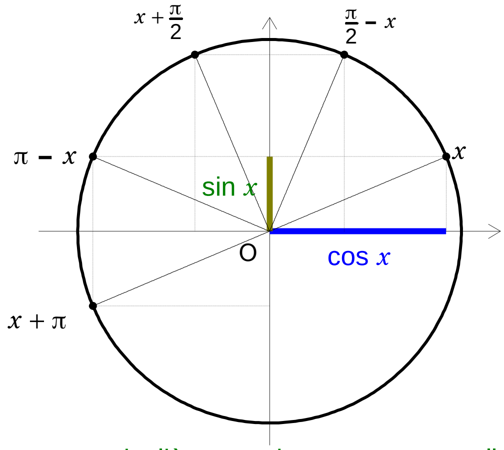
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période 2π.

Pour tout réel x : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

On dit que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire.

Propriétés (voir démonstration 06)

(voir animation)



Pour tout réel x :

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$; $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

$\sin(x+\pi)=-\sin x$; $\cos(x+\pi)=-\cos x$

$\sin(\pi-x)=\sin x$; $\cos(\pi-x)=-\cos x$

Remarque

- Il faut savoir retrouver toutes ces égalités à partir du dessin.
- Les relations $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ sont particulièrement importantes car elles permettent de transformer un cosinus en sinus et un sinus en cosinus

Propriétés : Formules d'addition (voir démonstration 07)

On a $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ $\qquad \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ $\qquad \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

Exercice 11 (voir réponses et correction)

En remarquant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, trouver les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 12 (voir réponses et correction)

Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Propriétés : Formules de duplication (voir démonstration 08)

$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$ $\qquad \sin(2a)=2\sin a\cos a$

Exercice 13 (voir réponses et correction)

Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$; $\sin(2x+\pi)$; $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$; $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 14 (voir réponses et correction)

Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

$\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$; $\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$; $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$; $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 15 (voir réponses et correction)

En utilisant les formules de duplication, déterminer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Vérifier que $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 16 (voir réponses et correction)

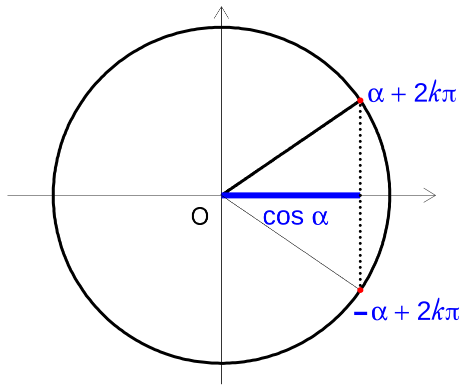
On considère un réel α tel que $\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi$ et $\sin\alpha=\frac{1}{3}$

Calculer les valeurs exactes de $\cos\alpha$; $\sin 2\alpha$; $\cos 2\alpha$; $\sin 3\alpha$; $\cos 3\alpha$

IV Résolutions d'équations

Propriété (admise)

L'équation $\cos x = \cos \alpha$ où x est l'inconnue et α un réel fixé,
a pour solutions : $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

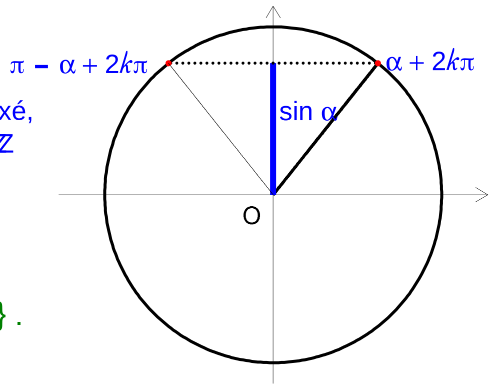


Remarque

L'équation $\cos x = 0$ a pour ensemble de solutions
$\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$.
Cet ensemble peut aussi s'écrire sous la forme $\left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \ ; \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Propriété (admise)

L'équation $\sin x = \sin \alpha$ où x est l'inconnue et α un réel fixé,
a pour solutions : $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$



Remarque

L'équation $\sin x = 0$ a pour ensemble de solutions
$\{ 0 + 2k\pi \ ; \ \pi + 2k\pi \ \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \}$.
Cet ensemble peut aussi s'écrire sous la forme $\{ k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \}$.

Exemple

Pour résoudre l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ on pourra écrire :

$$\cos x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ est donc $\left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercice 17 (voir réponses et correction)

Résoudre dans IR les équations et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique.

$\sin x = \frac{1}{2}$; $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x = -1$; $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 18 (voir réponses et correction)

Résoudre dans IR les équations et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique.

$\cos x = \cos\frac{\pi}{7}$; $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos x = -2$; $2\cos x + 1 = 0$

Exercice 19 (voir réponses et correction)

Résoudre dans IR chacune des équations suivantes, représenter les solutions sur un cercle trigonométrique puis donner les solutions dans $[-\pi \ ; \pi]$.

$\sin 3x = 1$; $\cos x \sin x = \frac{1}{4}$; $\cos 3x = \sin 2x$

Exercice 20 (voir réponses et correction)

Résoudre dans IR les équations :
$2\sin^2 x - 1 = 0$; $\cos 2x + \cos x = 0$; $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$