Primitives

Introduction

On considère la fonction affine f définie par $f(x) = 2x + 1$

Soit D la droite représentant f dans un repère orthonormal, soient A et B deux points de D et soient A' et B' les projetés de A et B sur l'axe Ox parallèlement à Oy.

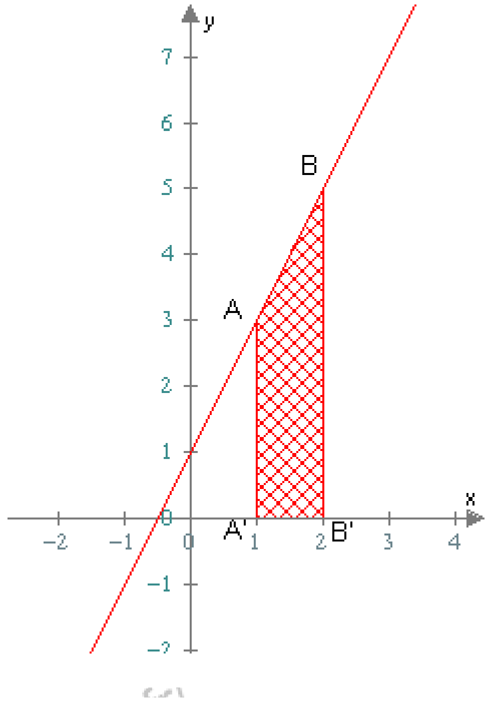
On suppose que A et B ont pour abscisses respectives 1 et 2.

Le quadrilatère ABB'A' a deux cotés parallèles et un angle droit, donc ABB'A' est un trapèze rectangle.

L'aire $\mathscr{A}$ d'un trapèze de bases b et B et de hauteur h est égale, en unités d'aire, à $\dfrac{B + b}{2} \times h$.

Donc l'aire du trapèze ABB'A' est : $\mathscr{A} = \dfrac{AA' + BB'}{2} \times A'B'$

c'est-à-dire $\mathscr{A} = \dfrac{3 + 5}{2} \times 1$ donc $\mathscr{A} = 4$



On considère maintenant les points A et B d'abscisses respectives x_1 et x_2 , avec $x_1 < x_2$, $f(x_1) > 0$ et $f(x_2) > 0$.

ABB'A' est un trapèze rectangle.

Son aire, en unités d'aire est : $\mathscr{A} = \dfrac{AA' + BB'}{2} \times A'B'$

Sachant que A et B sont sur la droite D, leurs ordonnées respectives sont $f(x_1) = 2x_1 + 1$ et $f(x_2) = 2x_2 + 1$

On a donc $AA' = f(x_1)$; $BB' = f(x_2)$ et $A'B' = x_2 - x_1$

Donc $\mathscr{A} = \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \times (x_2 - x_1)$

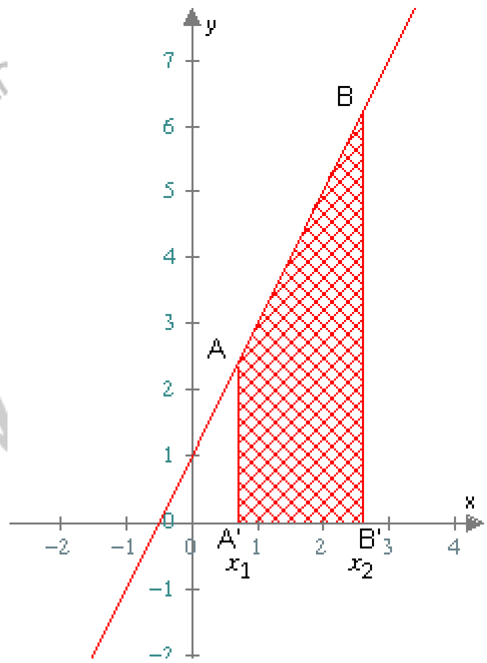
$\mathscr{A} = \dfrac{2x_1 + 1 + 2x_2 + 1}{2} \times (x_2 - x_1)$

$\mathscr{A} = (x_1 + x_2 + 1)(x_2 - x_1)$

$\mathscr{A} = x_1x_2 - x_1^2 + x_2^2 - x_2x_1 + x_2 - x_1$

$\mathscr{A} = x_2^2 + x_2 - x_1^2 - x_1$

$\mathscr{A} = x_2^2 + x_2 - (x_1^2 + x_1)$



Si on appelle g la fonction définie sur IR par $g(x) = x^2 + x$, on peut écrire $\mathscr{A} = g(x_2) - g(x_1)$.

On peut remarquer que g est dérivable sur IR et que pour tout $x \in$ IR , on a $g'(x) = 2x + 1 = f(x)$

La fonction g est donc une fonction dont la dérivée est f.
On dit que g est une primitive de f.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie et dérivable sur I, dont la dérivée est f.

Exemple

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ a pour primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$.
En effet F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $F' = f$.
On aurait pu choisir F définie par $F(x) = x^2 + 1$ ou $F(x) = x^2 - \frac{5}{2}$ ou plus généralement, si k est une constante réelle, $F(x) = x^2 + k$. Une fonction n'a pas une seule primitive.

Exercice 01 (voir réponses et correction)

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Trouver dans chacun des cas suivants une primitive de f

a) $f(x) = 2$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = 5x$ d) $f(x) = -4x^2$ e) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Exercice 02 (voir réponses et correction)

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Trouver dans chacun des cas suivants une primitive de f

a) $f(x) = -2x^2$ b) $f(x) = 3x + 5$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ d) $f(x) = 2x^5$ e) $f(x) = \frac{x-3}{2}$

Propriété (voir démonstration 01)

Si F_0 est une primitive de f sur un intervalle I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions F de la forme $F = F_0 + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 03 (voir réponses et correction)

Pour chacune des fonctions f donner l'ensemble des primitives de f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ I = $\mathbb{R}$
b) $f(x) = -x^2 + 1$ I = $\mathbb{R}$
c) $f(x) = \frac{1}{x}$ I = $]0\,;+\infty[$
d) $f(x) = e^x$ I = $\mathbb{R}$

Exercice 04 (voir réponses et correction)

Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$.
Déterminer les primitives de f sur $]0\,;+\infty[$. Existe-t-il une primitive de f prenant la valeur 2 au point 1 ?

Propriété (voir démonstration 02)

Soit f une fonction ayant des primitives sur un intervalle I et soit $x_0 \in$ I et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Il existe une et une seule primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Théorème (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle I a des primitives sur I.

Remarque

Certaines fonctions non continues peuvent aussi avoir des primitives.

Exercice 05 (voir réponses et correction)

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$. Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ prenant la valeur 0 en 2.

Primitives des fonctions usuelles

On donne ci dessous les primitives de certaines fonctions connues.
Ces primitives ont été obtenues à partir des dérivées connues.
L'intervalle I devra être convenablement choisi.
k désigne une constante réelle.

Fonction	Primitives
$f(x) = 0$	$F(x) = k$
$f(x) = 1$	$F(x) = x + k$
$f(x) = a$	$F(x) = ax + b$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + k$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + k$

Exercice 06 (voir réponses et correction)

Pour chacune des fonctions f ci-dessous, donner un intervalle I sur lequel f a des primitives et donner toutes les primitives de f sur I.

a) $f(x) = x^7$ b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ c) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$

Propriétés (voir démonstration 03)

Soit I un intervalle.
Si F est une primitive de f sur I et G est une primitive de g sur I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
Si F est une primitive de f sur I et si a est un réel, alors aF est une primitive de af sur I.

Remarques

Les propriétés ci-dessus ont été utilisées "naturellement" dans les exercices précédents.
Attention : Une primitive d'un produit ne sera pas obtenue en prenant le produit des primitives, puisque la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

Exercice 07 (voir réponses et correction)

Pour chacune des fonctions f ci-dessous, donner un intervalle I sur lequel f a des primitives et donner toutes les primitives de f sur I.

a) $f(x) = 5x^2 + x + \frac{2}{x}$ b) $f(x) = 3\sin x + 2\cos x$ c) $f(x) = \frac{e^x + 4}{3}$

Propriétés (voir démonstration 04)

- Une fonction de la forme $u' u^n$ avec $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ a pour primitives les fonctions de la forme $\frac{1}{n+1} u^{n+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- Une fonction de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ a pour primitives les fonctions de la forme $2\sqrt{u} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- Une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ell n\,|u| + k$ avec $k \in \mathbb{R}$, sur tout intervalle dans lequel u ne s'annule pas.
- Une fonction de la forme $u'.e^u$ a pour primitives $e^u + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.
- Une fonction de la forme $u' \times v' \circ u$ a pour primitives les fonctions de la forme $v \circ u + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 08 (voir réponses et correction)

Donner une primitive de la fonction f et préciser un intervalle I sur lequel cette primitive est définie.

a) $f(x) = 2(2x+1)^3$ b) $f(x) = (3x+1)^{-5}$ c) $f(x) = (-2x+1)^5$

Exercice 09 (voir réponses et correction)

Donner une primitive de la fonction f et préciser un intervalle I sur lequel cette primitive est définie.

a) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$ b) $f(x) = \sin x \cos^3 x$ c) $f(x) = \frac{1}{x}(\ell n\, x)^2$

Exercice 10 (voir réponses et correction)

Donner une primitive de la fonction f et préciser un intervalle I sur lequel cette primitive est définie.

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

Exercice 11 (voir réponses et correction)

Donner une primitive de la fonction f et préciser un intervalle I sur lequel cette primitive est définie.

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ b) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ c) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+3}$

Exercice 12 (voir réponses et correction)

Donner une primitive de la fonction f et préciser un intervalle I sur lequel cette primitive est définie.

a) $f(x) = 2xe^{x^2}$ b) $f(x) = e^{3x+1}$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 13 (voir réponses et correction)

Donner une primitive de la fonction f et préciser un intervalle I sur lequel cette primitive est définie.

a) $f(x) = 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $f(x) = x\cos(x^2 + \pi)$ c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\sqrt{x}\right)$

Exercice 14 (voir réponses et correction)

Donner une primitive de la fonction f et préciser un intervalle I sur lequel cette primitive est définie.

a) $f(x) = \frac{2x^2+3x+5}{x}$ b) $f(x) = \frac{\ell n\, x}{x}$ c) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

Exercice 15 (voir réponses et correction)

Donner une primitive de la fonction f et préciser un intervalle I sur lequel cette primitive est définie.

a) $f(x) = \frac{1}{e^{2x}}$ b) $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ c) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$