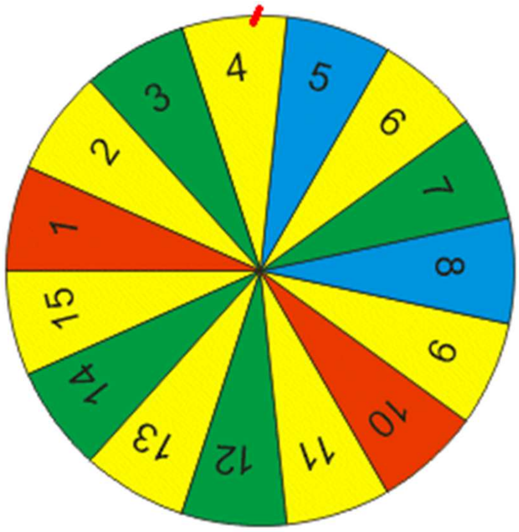
PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Exercice 01 (voir réponses et correction)



On considère une roue partagée en 15 secteurs angulaires numérotés de 1 à 15. Ces secteurs sont de différentes couleurs. On fait tourner la roue qui s'arrête sur l'un des 15 secteurs dont on note le numéro.
L'ensemble des éventualités est :

$\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$

1°) Déterminer la probabilité des événements :
E : « le numéro est multiple de 5 » ;
F : « le numéro n'est pas multiple de 5 » ;
G : « le numéro est pair et inférieur à 11 » ;
$E \cap G$; $E \cup G$.

2°) Les secteurs 1 et 10 sont de couleur rouge.
Les secteurs 5 et 8 sont de couleur bleue.
Les secteurs 3 ; 7 ; 12 et 14 sont de couleur verte.
Les autres secteurs sont de couleur jaune.
La variable aléatoire X qui associe à la couleur bleue le nombre 100, à la couleur rouge le nombre 30, à la couleur verte le nombre 10 et à la couleur jaune le nombre 0 correspond au gain du joueur en euros.
Donner la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter le résultat.

3°) Deux observateurs A et B sont un peu éloignés de la roue ; ils voient la couleur du secteur sur lequel la roue s'arrête mais ne peuvent pas distinguer les numéros. B connaît la correspondance entre les numéros et les couleurs des différents secteurs et indique à A sur quel numéro il doit parier.
Évaluer dans chacun des cas suivants la probabilité pour A de gagner :
- la roue s'arrête sur un secteur rouge et A parie que le numéro est 15 ;
- la roue s'arrête sur un secteur vert et A parie que le numéro est 3 ;
- la roue s'arrête sur un secteur bleu et A parie que le numéro est 8 ;
- la roue s'arrête sur un secteur jaune et A parie que le numéro n'est pas le 14.

Exercice 02 (voir réponses et correction)

Un sac contient 10 jetons : six jetons rouges numérotés 1, 1, 1, 2, 2, 4
quatre jetons verts numérotés 2, 2, 4, 4.

1°) On tire au hasard un jeton du sac.
a) Calculer les probabilités des événements suivants :
R : "tirer un jeton rouge" ; V : "tirer un jeton vert"
1 : "tirer un jeton portant le numéro 1"
b) Calculer $p(R \cup 1)$; $p(R \cap 1)$.

2°) a) On tire au hasard un jeton, et on voit qu'il est vert.
Quelle est alors la probabilité que ce jeton porte le numéro 1 ?
On note $p_V(1)$ la probabilité que le jeton porte le numéro 1 sachant que ce jeton est vert.
b) Déterminer $p_R(1)$; $p_R(2)$; $p_R(4)$; $p_V(2)$; $p_V(4)$.
Calculer $p_R(1) + p_R(2) + p_R(4)$ et $p_V(1) + p_V(2) + p_V(4)$.
c) Vérifier que $p_R(1) = \dfrac{p(1 \cap R)}{p(R)}$.

3°) Déterminer $p_2(R)$.
Vérifier que $p_2(R) = \dfrac{p(R \cap 2)}{p(2)}$.

Définition

Soit Ω un ensemble muni d'une loi de probabilité p et soit A un événement de probabilité non nulle.

Pour tout événement B, on appelle probabilité de B sachant que A est réalisé $p_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{p(A)}$.

$p_A(B)$ est aussi parfois notée $p(B / A)$.

Propriété (voir **démonstration 01**)

Soit Ω un ensemble muni d'une loi de probabilité p et soit A un événement de probabilité non nulle.
L'application qui, à un événement B, associe $p_A(B)$ est une loi de probabilité sur Ω.

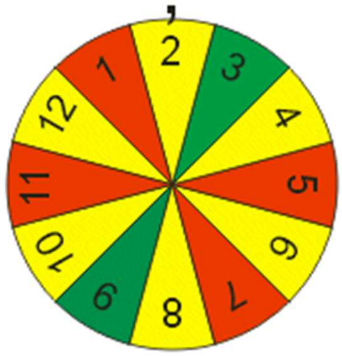
Remarque

Pour la loi de probabilité p_A l'événement $\overline{A}$ est un événement impossible : la probabilité que $\overline{A}$ soit réalisé sachant que A est réalisé est nulle.

En effet on a : $p_A(\overline{A}) = \dfrac{P(A \cap \overline{A})}{p(A)} = \dfrac{p(\varnothing)}{p(A)} = \dfrac{0}{p(A)} = 0$.

Exemple

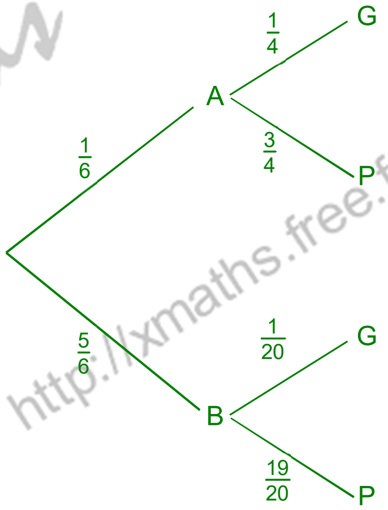
On fait tourner une roue comportant 12 secteurs de même taille numérotés de 1 à 12. Les secteurs portant un numéro pair sont de couleur jaune, les secteurs portant un numéro multiple de trois et impair sont de couleur verte et les autres secteurs sont rouges.
Si la roue s'arrête sur un secteur de couleur verte on tire un billet de loterie dans une urne A. Dans les autres cas, on tire un billet de loterie dans une urne B.
Dans l'urne A un billet sur 4 est gagnant alors que dans l'urne B seulement un billet sur 20 est gagnant.
On s'intéresse à la probabilité d'obtenir un billet gagnant.



On peut représenter la situation par l'arbre de probabilités (ou arbre pondéré) ci-contre :

Sachant que la roue comporte deux secteurs verts et dix secteurs qui ne sont pas verts, la probabilité qu'elle s'arrête sur un secteur vert et par conséquent que le billet soit tiré dans l'urne A est $p(A) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

La probabilité que le billet soit tiré dans l'urne B est alors : $p(B) = p(\overline{A}) = \dfrac{5}{6}$.



$p(A \cap G) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{24}$

$p(A \cap P) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{8}$

$p(B \cap G) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{24}$

$p(B \cap P) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{19}{20} = \dfrac{19}{24}$

Sachant que la roue s'est arrêtée sur un secteur vert donc que le billet est tiré dans l'urne A,
la probabilité qu'il soit gagnant est alors $p_A(G) = \dfrac{1}{4}$,

la probabilité qu'il soit perdant est donc $p_A(P) = p_A(\overline{G}) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

Sachant que la roue s'est arrêtée sur un secteur qui n'est pas vert et donc que le billet est tiré dans l'urne B,
la probabilité qu'il soit gagnant est alors $p_B(G) = \dfrac{1}{20}$,

la probabilité qu'il soit perdant est donc $p_B(\overline{G}) = 1 - \dfrac{1}{20} = \dfrac{19}{20}$.

On peut remarquer que sur chacune des branches de niveau 1 figurent les probabilités de A et de B, et sur chacune des branches de niveau 2 figurent des probabilités conditionnelles (sachant que A est réalisé ou sachant que B est réalisé).

On peut calculer dans chacun des quatre cas les probabilités des intersections en utilisant la définition des probabilités conditionnelles.

La probabilité d'obtenir un billet gagnant est alors : $p(G) = p(A \cap G) + p(B \cap G) = \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{24} = \dfrac{1}{12}$.

Celle d'obtenir un billet perdant est : $p(P) = p(A \cap P) + p(B \cap P) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{19}{24} = \dfrac{22}{24} = \dfrac{11}{12}$. On a bien $p(P) = p(\overline{G})$.

Règles d'utilisation des arbres de probabilités

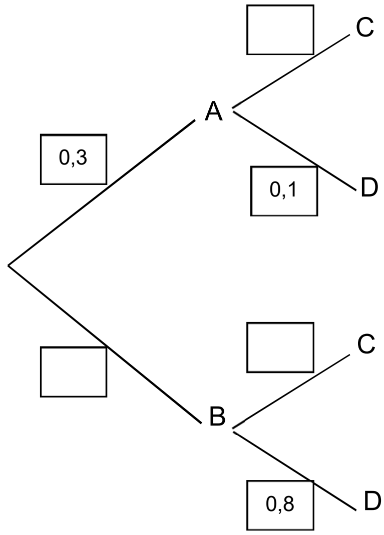
- Les probabilités portées sur les branches de niveau supérieur à 1 sont des probabilités conditionnelles.
- La somme des probabilités des différentes branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un événement issu d'un chemin est égale au produit des probabilités figurant sur les différentes branches de ce chemin.

Exercice 03 (voir réponses et correction)

Une situation de probabilités est représentée par l'arbre ci-contre.

Compléter cet arbre et donner les probabilités suivantes :

$p(B)$; $p_A(C)$; $p(A \cap C)$; $p(C)$; $p(D)$; $p_C(A)$



Exercice 04 (voir réponses et correction)

A et C sont deux événements correspondant à une même épreuve aléatoire.

On sait que : $p(A) = 0{,}6$; $p(C) = 0{,}5$; $p(A \cap C) = 0{,}18$

Déterminer $p(\overline{A})$; $p_A(C)$; $p_A(\overline{C})$; $p(\overline{A} \cap C)$; $p_{\overline{A}}(C)$; $p_{\overline{A}}(\overline{C})$; $p_C(\overline{A})$

(On pourra s'aider d'un arbre de probabilités)

Exercice 05 (voir réponses et correction)

On considère le jeu suivant :

On jette un première fois une pièce de monnaie ;

si on obtient face, on gagne 4 euros et le jeu s'arrête ;

si on obtient pile, on gagne 1 euro et le jeu se poursuit ;

on jette alors une deuxième fois la pièce ;

si on obtient face on gagne 2 euros et le jeu s'arrête ;

si on obtient pile on gagne 1 euro et le jeu se poursuit ;

on jette alors une troisième et dernière fois la pièce ;

si on obtient face, on gagne 2 euros ;

si on obtient pile, on gagne 1 euro ;

Représenter le jeu par un arbre pondéré. En déduire la probabilité d'avoir obtenu 4 euros à la fin du jeu.

Exercice 06 (voir réponses et correction)

On soumet une population d'enfants à un test pour dépister la présence d'un caractère génétique A.

La probabilité qu'un enfant ayant le caractère A ait un test positif est 0,99.

La probabilité qu'un enfant n'ayant pas le caractère A ait un test négatif est 0,98.

1°) On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant sur 1 000 était porteur du caractère A. Représenter la situation par un arbre pondéré.
Déterminer la probabilité qu'un enfant pris au hasard dans la population étudiée ait un test positif.
Déterminer la probabilité qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère A.
Donner une valeur approchée de ce résultat en pourcentage avec une décimale.

2°) On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant sur 100 était porteur du caractère A.
Déterminer la probabilité qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère A.
Donner une valeur approchée de ce résultat en pourcentage avec une décimale.

3°) On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant avait une probabilité p d'être porteur du caractère A.
Donner, en fonction de p, la probabilité V(p) qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère A.
(V(p) est appelée valeur prédictive du test).
En utilisant une calculatrice ou un ordinateur représenter V(p) en fonction de p et commenter.

Définition

Étant donné un ensemble Ω muni d'une loi de probabilité p, on dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Propriété (voir démonstration 02)

Si A et B sont des événements de probabilité non nulle, les propositions suivantes sont équivalentes :
- A et B sont indépendants
- $p_A(B) = p(B)$
- $p_B(A) = p(A)$

Remarque

Pour des événements de probabilité non nulle, dire que A et B sont indépendants revient à dire que le fait que B soit réalisé n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de A et inversement.

Exercice 07 (voir réponses et correction)

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
On considère l'événement C : « tirer un cœur » et l'événement A : « tirer un as ».
Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Exercice 08 (voir réponses et correction)

E et F sont deux événements indépendants tels que $p(E) = 0{,}2$ et $p(F) = 0{,}4$.
Déterminer $p(E \cup F)$.

Exercice 09 (voir réponses et correction)

On jette un dé cubique et on considère les événements :
A : «tirer un numéro strictement inférieur à 4»
B : «tirer un numéro strictement supérieur à 4»
I : «tirer un numéro impair» .
Les événements A et I sont-ils indépendants ? Les événements B et I sont-ils indépendants ?
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 10 (voir réponses et correction)

On jette simultanément un dé bleu et un dé rouge.
Le dé bleu a des faces numérotées 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 5 ; 6.
Le dé rouge a des faces numérotées : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.
On appelle S la variable aléatoire qui à un lancer fait correspondre la somme des deux numéros tirés.
Donner la loi de probabilité de S.
Les événements $(S = 7)$ et «le dé bleu a donné le numéro 2» sont-ils indépendants ?
Les événements $(S \geqslant 8)$ et «le dé bleu a donné un numéro pair» sont-ils indépendants ?

Définition

Soit Ω un ensemble et soient E_1 , E_2, ... , E_n des parties de Ω.
On dit que E_1 , E_2, ... , E_n est une partition de Ω si les parties E_1 , E_2, ... , E_n sont deux à deux disjointes et si leur réunion est égale à Ω.

Remarque

Lorsque E_1 , E_2, ... , E_n est une partition de Ω, tout élément de Ω appartient à une et à une seule des parties E_1 , E_2, ... , E_n .

Exemple

Dans une classe C, on peut faire une partition en considérant les deux parties F et G :
F ensemble des filles de la classe et G ensemble des garçons de la classe.
(Les deux ensembles F et G sont disjoints et leur réunion est égale C).
On peut aussi faire une partition de C par les années de naissance, ou par l'initiale du nom etc...

Propriété (voir démonstration 03)

Soit E_1 , E_2, ... , E_n une partition de Ω pour laquelle les événements E_1 , E_2, ... , E_n ne sont pas de probabilité nulle.
Pour tout événement A, on a $p(A) = p(A \cap E_1) + p(A \cap E_2) + ... + p(A \cap E_n)$
c'est-à-dire $p(A) = p_{E_1}(A) \times p(E_1) + p_{E_2}(A) \times p(E_2) + ... + p_{E_n}(A) \times p(E_n)$
(Cette formule est appelée formule des probabilités totales)

Exercice 11 (voir réponses et correction)

Deux événements indépendants A et B sont tels que $p(A) = \dfrac{1}{5}$ et $p(B) = \dfrac{1}{4}$.

Déterminer : $p(A \cap B)$; $p_A(B)$; $p(\overline{A} \cap B)$

Propriété (voir démonstration 04)

Si deux événements A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.

Remarque

On en déduit que si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 12 (voir réponses et correction)

Une étude a porté sur les véhicules d'un parc automobile.
On a constaté que :

- lorsqu'on choisit au hasard un véhicule du parc automobile la probabilité qu'il présente un défaut de freinage est de 0,67 ;
- lorsqu'on choisit au hasard dans ce parc un véhicule présentant un défaut de freinage, la probabilité qu'il présente aussi un défaut d'éclairage est de 0,48 ;
- lorsqu'on choisit au hasard dans ce parc un véhicule ne présentant pas de défaut de freinage, la probabilité qu'il ne présente pas non plus de défaut d'éclairage est de 0,75.

1°) Représenter la situation par un arbre de probabilités et déterminer la probabilité pour qu'un véhicule choisi au hasard présente un défaut d'éclairage. Traduire le résultat en terme de pourcentages.
2°) Déterminer la probabilité pour qu'un véhicule choisi au hasard parmi les véhicules présentant un défaut d'éclairage présente aussi un défaut de freinage. Traduire le résultat en terme de pourcentages.

Exercice 13 (voir réponses et correction)

Lors d'une journée "portes ouvertes" dans un commerce, on remet à chaque visiteur un ticket numéroté qui permet de participer à une loterie. Lorsqu'un visiteur arrive 3 cas peuvent se présenter :
- le visiteur est reconnu comme client habituel et on lui remet un ticket dont le numéro se termine par 0 ;
- le visiteur est reconnu comme client occasionnel et on lui remet un ticket dont le numéro se termine par 1 ;
- le visiteur n'est pas reconnu et on lui remet un ticket dont le numéro se termine par 5.

La probabilité qu'un ticket dont le numéro se termine par 0 gagne un cadeau est de 0,5 ;
La probabilité qu'un ticket dont le numéro se termine par 1 gagne un cadeau est de 0,1 ;
La probabilité qu'un ticket dont le numéro se termine par 5 gagne un cadeau est de 0,01.
Parmi les visiteurs 15% sont reconnus comme clients habituels et 20% comme clients occasionnels.
On choisit un visiteur au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il gagne un cadeau ?
Un visiteur a gagné un cadeau. Quelle est la probabilité qu'il ait été reconnu comme client habituel ?

Exercice 14 (voir réponses et correction)

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré.
Une partie consiste à effectuer deux lancers sucessifs et indépendants de ce dé. À chaque lancer on note la couleur de la face cachée.
On considère les événements suivants :

- E est l'événement «à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes»,
- F est l'événement «à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont de la même couleur».

1°) Calculer les probabilités des événements E et F ainsi que la probabilité de E sachant F.
2°) On effectue dix parties identiques et indépendantes. (On donnera les résultats au millième près)
  a) Calculer la probabilité d'obtenir trois fois l'événement F au cours de ces dix parties.
  b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'événement F au cours de ces dix parties.

Exercice 15 (voir **réponses et correction**)

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C.
À l'instant 0, la puce est en A.
Pour tout entier naturel n :

- si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n + 1)$, elle est :
  soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$;
  soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$.
- si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n + 1)$, elle est :
  soit en C, soit en A de façon équiprobable.
- si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

1°) Écrire un algorithme effectuant 10 000 simulations des trois premiers déplacements de la puce.
Sur ces 10 000 simulations, vérifier que, environ 500 à 600 fois la puce se trouve en B au bout des trois déplacements.
Combien de fois environ la puce se trouve-t-elle en A au bout des trois déplacements ?
Combien de fois environ la puce se trouve-t-elle en C au bout des trois déplacements ?

2°) Modifier l'algorithme précédent pour effectuer 10 000 simulations des quatre premiers déplacements.
Sur ces 10 000 simulations, vérifier que, environ 250 à 300 fois la puce se trouve en A au bout des quatre déplacements.
Combien de fois environ la puce se trouve-t-elle en B au bout des quatre déplacements ?
Combien de fois environ la puce se trouve-t-elle en C au bout des quatre déplacements ?

On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement «à l'instant n la puce est en A» (respectivement en B, en C).
On note a_n (respectivement b_n, c_n) la probabilité de l'événement A_n, (respectivement B_n, C_n).
On a donc : $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$.

3°) En effectuant un arbre pondéré, justifier que $a_3 = 0$ et $b_3 = \frac{1}{18}$. Déterminer c_3.
Ces résultats sont-ils conformes aux résultats du 1°) ?

4°) En complétant l'arbre pondéré de la question précédente, justifier que $a_4 = \frac{1}{36}$ et $b_4 = 0$. Déterminer c_4.
Ces résultats sont-ils conformes aux résultats du 2°) ?

5°) Montrer que, pour tout entier naturel n :
$a_n + b_n + c_n = 1$; $a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$

6°) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+2} = \frac{1}{6} a_n$.

b) En déduire que pour tout entier naturel p, $a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p$ et $a_{2p+1} = 0$.

c) Modifier l'algorithme du 1°) pour vérifier la valeur de a_6.

7°) Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?