RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Exemple 1

On considère la proposition P(n) dépendant d'un entier n : « $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11 »
(On rappelle qu'un nombre est multiple de 11 lorsqu'il s'écrit sous la forme $11 \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$)
Vérifions que cette proposition est vraie pour les entiers $n = 0 , 1 , 2 , 3 , 4$.

Pour $n = 0$: $10^n - (-1)^n = 10^0 - (-1)^0 = 1 - 1 = 0 = 11 \times 0$
Pour $n = 1$: $10^n - (-1)^n = 10^1 - (-1)^1 = 10 - (-1) = 10 + 1 = 11 = 11 \times 1$
Pour $n = 2$: $10^n - (-1)^n = 10^2 - (-1)^2 = 100 - 1 = 99 = 11 \times 9$
Pour $n = 3$: $10^n - (-1)^n = 10^3 - (-1)^3 = 1\,000 - (-1) = 1\,000 + 1 = 1\,001 = 11 \times 91$
Pour $n = 4$: $10^n - (-1)^n = 10^4 - (-1)^4 = 10\,000 - 1 = 9\,999 = 11 \times 909$

On pourrait continuer ainsi les vérifications, mais quelque soit le nombre de vérifications effectuées, on ne peut pas affirmer que cette proposition est vraie pour tout entier naturel n.

Pour justifier que cette proposition est vraie pour tout entier naturel n, démontrons le résultat suivant :
Si la proposition est vraie pour le rang n, alors elle est vraie pour le rang suivant $n+1$.

Pour cela, supposons que la proposition est vraie pour un rang n (n étant un entier naturel fixé).
Alors pour cet entier naturel n, on a :
« $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11 » c'est-à-dire $10^n - (-1)^n = 11 \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

On veut alors démontrer que la proposition est vraie pour $n+1$ c'est-à-dire que $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 11 \times K$, $K \in \mathbb{Z}$

Puisque $10^n - (-1)^n = 11 \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on peut écrire

$10^n = 11 \times k + (-1)^n$
donc $10 \times 10^n = 10 [11 \times k + (-1)^n]$ (en multipliant les deux membres par 10)
donc $10^{n+1} = 110 \times k + 10 \times (-1)^n$
donc $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 110 \times k + 10 \times (-1)^n - (-1)^{n+1}$ (en enlevant $(-1)^{n+1}$ aux deux membres)
donc $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 110 \times k + (-1)^n [10 - (-1)^1]$
donc $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 110 \times k + (-1)^n [10 + 1]$
donc $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 11 [10\,k + (-1)^n]$

k étant un entier, le nombre $K = 10\,k + (-1)^n$ est aussi un entier.
On a donc démontré que $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 11 \times K$ avec $K \in \mathbb{Z}$.

On a donc démontré le caractère "héréditaire" de la proposition :
Si la proposition est vraie pour un entier n, alors elle est vraie pour l'entier suivant $n+1$.

On peut alors observer que : puisqu'elle est vraie pour 0, elle est vraie pour 1 ; puisqu'elle est vraie pour 1, elle est vraie pour 2 ; puisqu'elle est vraie pour 2, elle est vraie pour 3 .....
Il apparaît alors "clairement" que la proposition est vraie pour tous les entiers n de $\mathbb{N}$.

En assimilant l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels à une échelle sur laquelle on voudrait monter, le principe du raisonnement qui vient d'être fait est le suivant :
si on sait monter sur le premier barreau de l'échelle et si l'on sait passer d'un barreau au barreau suivant, alors on peut atteindre tous les barreaux de l'échelle.

Le type de raisonnement ainsi effectué est appelé **raisonnement par récurrence**.
Il est basé sur la propriété suivante :

Propriété (admise)

Soit P(n) une proposition dépendant d'un entier n et soit n_0 un entier fixé.
Si P(n_0) est vraie (Initialisation)
et si pour tout entier $n \geqslant n_0$ P(n) $\Rightarrow$ P($n+1$) (hérédité),
alors P(n) est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Remarque

Cette propriété, que l'on ne démontre pas et qui semble tenir du « bon sens » est en fait un axiome des mathématiques, c'est-à-dire un énoncé posé à priori qui sera une des bases de la théorie mathématique.

Exemple 2

Démontrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $2^n \geqslant n + 1$.

Soit P(n) la proposition : « 2^n est supérieur ou égal à $n + 1$ »

<u>Initialisation</u> :

pour $n = 0$, on a $2^n = 2^0 = 1$ et $n + 1 = 0 + 1 = 1$, donc la proposition P(n) est vraie pour $n = 0$.

(On pourrait vérifier sans difficulté la proposition P(n) pour $n = 1, 2, 3...$ cela peut être utile pour la compréhension, mais c'est sans utilité pour le raisonnement)

<u>Hérédité</u> :

Supposons que la proposition P(n) est vraie pour un entier naturel fixé n.

On a donc $2^n \geqslant n + 1$.

On veut alors démontrer que P(n+1) est vraie c'est-à-dire que $2^{n+1} \geqslant (n + 1) + 1$ c'est-à-dire $2^{n+1} - (n + 2) \geqslant 0$

Sachant que $2^n \geqslant n + 1$, on peut multiplier chacun des membres par 2 (nombre réel positif).

On obtient $2 \times 2^n \geqslant 2(n + 1)$ c'est-à-dire $2^{n+1} \geqslant 2n + 2$

Alors $2^{n+1} - (n + 2) \geqslant 2n + 2 - (n + 2)$ (en enlevant (n+2) aux deux membres)

donc $2^{n+1} - (n + 2) \geqslant n$

Comme n est un entier naturel, n est donc positif ou nul, on a alors : $2^{n+1} - (n + 2) \geqslant n \geqslant 0$

On a donc obtenu $2^{n+1} - (n + 2) \geqslant 0$ donc $2^{n+1} \geqslant (n + 1) + 1$

La proposition P(n+1) est alors vérifiée.

On a donc justifié que P(0) est vraie (initialisation)

et que pour tout entier $n \geqslant 0$ P(n) $\Rightarrow$ P(n+1) (hérédité)

On a donc démontré par récurrence que la proposition P(n) est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

c'est-à-dire que $2^n \geqslant n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 01 (voir **réponses et correction**)

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, la somme des entiers de 1 à n est égale à $\frac{n(n + 1)}{2}$

c'est-à-dire $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2}$

Exercice 02 (voir **réponses et correction**)

Soit x un réel différent de 1.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

Exercice 03 (voir **réponses et correction**)

On considère la proposition P(n) : $2^n \geqslant n^2$.

1°) Cette proposition est-elle vraie pour les entiers 0, 1, 2, 3, 4 , 5 ?

2°) Démontrer que la proposition P(n) est vraie pour tout entier naturel n différent de 3.

Exercice 04 (voir **réponses et correction**)

Soit S_n la somme des nombres entiers de 1 à n : $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$

Soit C_n la somme des cubes des nombres entiers de 1 à n : $C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

1°) Calculer S_n et C_n lorsque $n = 1 , 2 , 3 , 4 , 5$. Que pouvez-vous conjecturer ?

2°) Créer un algorithme permettant de calculer les sommes S_n et C_n pour un entier donné, et de vérifier la conjecture.

3°) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$: $C_n = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$

Conclure.