Exercice 19

1°) f est définie sur $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x \ \ell n x}$

f est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = x \ \ell n x$. On sait que $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

Et on a $u'(x) = 1 \times \ell n(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ell n(x) + 1$

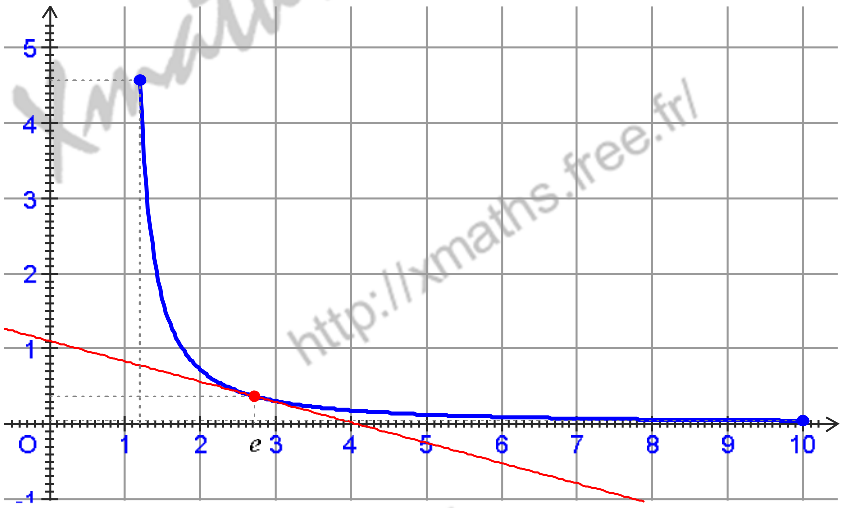
Donc $f'(x) = -\dfrac{\ell n(x) + 1}{(x \ \ell n x)^2}$ pour tout $x \in]1 ; +\infty[$.

Pour tout $x \in]1 ; +\infty[$ on a $(x \ \ell n x)^2 > 0$
Donc $f'(x)$ est du signe de $-[\ell n(x) + 1]$
Comme $x \in]1 ; +\infty[$, on a $x > 1$ donc $\ell n x > 0$ donc $\ell n(x) + 1 > 0$ donc $-[\ell n(x) + 1] < 0$
Donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]1 ; +\infty[$
On en déduit que f est strictement décroissante sur $]1 ; +\infty[$

2°) On trace la courbe $(\mathscr{C})$ pour $x \in [1,2 ; 10]$.

On a $f(1,2) = \dfrac{1}{1,2 \ \ell n 1,2}$; on obtient $f(1,2) \approx 4,57$

et $f(10) = \dfrac{1}{10 \ \ell n 10}$; on obtient $f(10) \approx 0,04$



3°) L'équation de la tangente T à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse e est :
$y = f'(e)(x - e) + f(e)$

On a $f(e) = \dfrac{1}{e \ \ell n e} = \dfrac{1}{e}$ et $f'(e) = -\dfrac{\ell n(e) + 1}{(e \ \ell n e)^2} = -\dfrac{2}{e^2}$

Donc $y = -\dfrac{2}{e^2}(x - e) + \dfrac{1}{e}$ c'est-à-dire $y = -\dfrac{2}{e^2}x + \dfrac{2}{e} + \dfrac{1}{e}$

Donc T a pour équation $y = -\dfrac{2}{e^2}x + \dfrac{3}{e}$

On trace la tangente sur le dessin précédent en plaçant :

le point d'abscisse e et d'ordonnée $f(e) = \dfrac{1}{e}$ avec $\dfrac{1}{e} \approx 0,37$

et le point d'abscisse 0 et d'ordonnée $\dfrac{3}{e}$ avec $\dfrac{3}{e} \approx 1,1$