Exercice C2

1°) $\sin 4x = \cos 2x \iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \cos 2x$

$$\iff \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 4x = 2x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{2} - 4x = -2x + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 6x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} - k\frac{\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} - k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

L'équation $\sin 4x = \cos 2x$ a pour ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$:

$S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \;;\; \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$ (lorsque k décrit $\mathbb{Z}$, $-k$ décrit $\mathbb{Z}$)

- $\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$ est élément de $[0 ; 2\pi]$ lorsque k est tel que :

  $0 \leqslant \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \leqslant 2\pi \iff -\frac{\pi}{12} \leqslant k\frac{\pi}{3} \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{12} \iff -\frac{\pi}{12} \leqslant k\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{23\pi}{12} \iff -\frac{1}{12} \leqslant \frac{k}{3} \leqslant \frac{23}{12}$

  $\iff -\frac{3}{12} \leqslant k \leqslant \frac{23 \times 3}{12} \iff -\frac{1}{4} \leqslant k \leqslant \frac{23}{4}$

  Les entiers compris entre $-\frac{1}{4}$ et $\frac{23}{4}$ sont 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 .

- $\frac{\pi}{4} + k\pi$ est élément de $[0 ; 2\pi]$ lorsque k est tel que :

  $0 \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant 2\pi \iff -\frac{\pi}{4} \leqslant k\pi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{4} \iff -\frac{\pi}{4} \leqslant k\pi \leqslant \frac{7\pi}{4} \iff -\frac{1}{4} \leqslant k \leqslant \frac{7}{4}$

  Les entiers compris entre $-\frac{1}{4}$ et $\frac{7}{4}$ sont 0 et 1 .

Dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ l'équation a donc pour solutions

$\frac{\pi}{12} + 0 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{17\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{3} = \frac{21\pi}{12} = \frac{7\pi}{4}$

et $\frac{\pi}{4} + 0 \times \pi = \frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4} + 1 \times \pi = \frac{5\pi}{4}$

Dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ l'équation a pour ensemble de solutions :

$S' = \left\{ \frac{\pi}{12} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{12} ; \frac{3\pi}{4} ; \frac{13\pi}{12} ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{17\pi}{12} ; \frac{7\pi}{4} \right\}$.

2°) Soit (E) l'équation : $4\cos^2 x + 2(\sqrt{2} - 1)\cos x - \sqrt{2} = 0$

Posons $X = \cos x$. L'équation se ramène à : $4X^2 + 2(\sqrt{2} - 1)X - \sqrt{2} = 0$

Il s'agit alors d'une équation du second degré dont on peut calculer le discriminant :

$\Delta = 4(\sqrt{2} - 1)^2 - 4 \times 4 \times (-\sqrt{2}) = 4(2 - 2\sqrt{2} + 1) + 16\sqrt{2} = 4(2 - 2\sqrt{2} + 1 + 4\sqrt{2}) = 4(2 + 2\sqrt{2} + 1)$

donc $\Delta = 4(\sqrt{2} + 1)^2$

On a $\Delta > 0$, donc l'équation $4X^2 + 2(\sqrt{2} - 1)X - \sqrt{2} = 0$ a deux solutions qui sont :

$X_1 = \frac{-2(\sqrt{2} - 1) - 2(\sqrt{2} + 1)}{2 \times 4} = -\frac{4\sqrt{2}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $X_2 = \frac{-2(\sqrt{2} - 1) + 2(\sqrt{2} + 1)}{2 \times 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

On en déduit que :

(E) $\iff \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \cos\frac{3\pi}{4}$ ou $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$\iff x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

L'équation $4\cos^2 x + 2(\sqrt{2} - 1)\cos x - \sqrt{2} = 0$ a pour ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$:

$S = \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \;;\; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \;;\; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;;\; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Les solutions étant définies modulo 2π , il y aura quatre solutions dans $[0 ; 2\pi]$.

Dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ l'équation a pour solutions : $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$.