Continuité - Limites
Asymptotes à une courbe

Continuité - Théorème des valeurs intermédiaires

Notion de continuité

Graphiquement, on peut reconnaître une fonction continue sur un intervalle I par le fait que le tracé de la courbe représentative de f pour $x \in$ I peut se faire sans lever le crayon de la feuille.

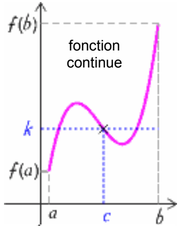
Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée, la fonction logarithme népérien, la fonction exponentielle sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

Convention

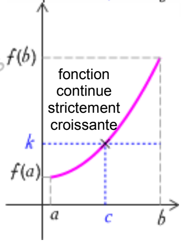
Il est convenu que, dans un tableau de variation de fonction, les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone**.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soient $a \in$ I et $b \in$ I
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
Ce que l'on peut aussi exprimer sous la forme :
L'équation $f(x) = k$ a au moins une solution c comprise entre a et b.



Si de plus la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle I, alors le réel c est unique.



La continuité de la fonction f est une hypothèse essentielle du théorème.

Le théorème des valeurs intermédiaires pourra être étendu à un intervalle non borné.

Opérations sur les limites

Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f + g$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	pas de résultat général

Limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général

Limite d'un inverse

Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 par valeurs inférieures	0 par valeurs supérieures	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{g}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	0

Limite d'un quotient

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 par valeurs sup. ou par valeurs inf.	0	0 par valeurs sup. ou par valeurs inf.	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général

Les formes indéterminées

On dit qu'il y a forme indéterminée lorsqu'on ne peut pas donner de résultat général à partir des tableaux précédents.
Les formes indéterminées sont de différents types et on peut dans beaucoup de cas trouver la limite en effectuant les transformations suivantes.

$+\infty - \infty$: Factorisation du terme "dominant". (terme de plus haut degré pour un polynôme)

$\dfrac{\infty}{\infty}$: Factorisation des termes "dominants" puis simplification.

$\dfrac{0}{0}$: Factorisation d'un terme tendant vers 0, puis simplification.

$0 \times \infty$: peut en général se ramener à l'une des formes $\dfrac{\infty}{\infty}$ ou $\dfrac{0}{0}$.

Lorsque des racines carrées interviennent et que les méthodes ci-dessus ne donnent pas de résultat, on pourra multiplier par la quantité "conjuguée".

(Les notations $+\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$ … sont des abréviations à ne pas utiliser dans un devoir rédigé)

Limites et inégalités

I est un intervalle dépendant de l'endroit où la limite est cherchée :
$]a\,;+\infty[$ pour une limite en $+\infty$, $]x_0 - h\,;x_0 + h[$ pour une limite en x_0 etc…

Limites par comparaison
Si, pour tout $x \in$ I, $f(x) \geqslant g(x)$ et si $\lim g(x) = +\infty$ alors $\lim f(x) = +\infty$.
Si, pour tout $x \in$ I, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim g(x) = -\infty$ alors $\lim f(x) = -\infty$.

Théorème des gendarmes
Si pour tout $x \in$ I $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim g(x) = \lim h(x) = \ell$,
alors $\lim f(x) = \ell$.

Limite d'une composée de fonctions

a, b et ℓ désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} f(X) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(u(x)) = \ell$

Limites obtenues par la dérivée

Si f est une fonction dérivable en x_0 alors :

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ ou encore $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Limites usuelles

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la limite de son terme de plus haut degré.
La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

On trouvera dans les fiches "logarithme népérien" et "exponentielle" les limites correspondant à ces fonctions.
Quand x tend vers $+\infty$, la fonction exponentielle l'emporte sur toutes les fonctions puissances et les fonctions puissances l'emportent sur la fonction logarithme népérien

Asymptotes à une courbe

$(\mathscr{C})$ étant la courbe représentative de la fonction f

Asymptote parallèle à (Oy) (verticale)
$(\mathscr{C})$ a pour asymptote la droite d'équation $x = a$ si :

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

Asymptote parallèle à (Ox) (horizontale)
$(\mathscr{C})$ a pour asymptote la droite d'équation $y = b$ si :

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$ ou $f(x) = b$

Asymptote oblique , asymptote courbe
$(\mathscr{C})$ a pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$ si :

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

$(\mathscr{C})$ a pour asymptote la courbe représentative de g si :

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) - g(x) = 0$

Dérivée

Nombre dérivé - Fonction dérivée - Tangente

f est dérivable en x_0 lorsque $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est un nombre réel.

Cette limite est le nombre dérivé en x_0, on le note $f'(x_0)$.

On a alors $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Si une fonction f est dérivable en tout point x_0 d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I, et l'application qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f au point x est appelée fonction dérivée de f. La fonction dérivée de f est notée f'.

La courbe représentative de f a pour tangente en $M_0(x_0\ ;\ f(x_0))$ la droite T de coefficient directeur $f'(x_0)$. T a pour équation : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

- $u+v$ est dérivable sur I et on a $(u+v)'=u'+v'$
- uv est dérivable sur I et on a $(uv)'=u'v+uv'$
- Si $a\in\mathbb{R}$, au est dérivable sur I et on a $(au)'=au'$
- Si u ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable et $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$
- Si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable et $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I,
si f est une fonction dérivable sur un intervalle J, et si pour tout $x\in$ I, $u(x)\in$ J,
alors $f(u)$ est dérivable sur I et on a $(f(u))'=u'\times f'(u)$

Application aux variations d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I,

- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si f' est (strictement) positive sur I, alors f est (strictement) croissante sur I.
- Si f' est (strictement) négative sur I, alors f est (strictement) décroissante sur I.

Dérivées usuelles

Fonction	**Dérivée**
$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{Z}$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et on a : $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors pour tout $n\in\mathbb{Z}$, u^n est dérivable en tout point où elle est définie et on a : $(u^n)'=nu'u^{n-1}$

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors $\ln u$ est dérivable sur I et on a : $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors
e^u est dérivable sur I et on a : $(e^u)'=u'e^u$

Primitives

Définition

On appelle primitive d'une fonction f sur un intervalle I, toute fonction F définie et dérivable sur I, dont la dérivée est f.

Si F est une primitive de f sur I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G de la forme G = F + k, avec $k \in \mathbb{R}$.
(c'est-à-dire que deux primitives d'une même fonction sont égales à une constante près)

Soit f une fonction ayant des primitives sur un intervalle I, soit $x_0 \in$ I et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Il existe une et une seule primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Primitives	Intervalle
$f(x) = 0$	$F(x) = k$ $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = a$	$F(x) = ax + k$ $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$ $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$ $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$ $k \in \mathbb{R}$	$]0\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;0[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$ $k \in \mathbb{R}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ $k \in \mathbb{R}$	$]0\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;0[$ $(n<0)$ $\mathbb{R}$ $(n \geq 0)$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + k$ $k \in \mathbb{R}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$ $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Propriétés

Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I,
alors F + G est une primitive de $f + g$ sur I.

Si F est une primitive de f sur I et si a est un réel,
alors aF est une primitive de af sur I.

ATTENTION :
Un produit de primitives n'est pas une primitive du produit.
Un quotient de primitives n'est pas une primitive du quotient.

Sur un intervalle bien choisi :

- Une fonction de la forme $u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ a pour primitives les fonctions de la forme $\frac{1}{n+1}u^{n+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- Une fonction de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ a pour primitives les fonctions de la forme $2\sqrt{u} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- Une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ a pour primitives les fonctions de la forme $\ln|u| + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- Une fonction de la forme $u'e^u$ a pour primitives les fonctions de la forme $e^u + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- Une fonction de la forme $u' \times f'(u)$ a pour primitives les fonctions de la forme $f(u) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Logarithme Népérien

Définition - Propriétés

La fonction qui à x associe $\frac{1}{x}$ a des primitives sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Parmi ces primitives, celle qui s'annule en 1 est appelée logarithme népérien.
On la note $\ell n :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto \ell n\, x$

La fonction ℓn est définie, continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et on a $(\ell n\, x)' = \frac{1}{x}$.

$\ell n\, 1 = 0$; e l'unique réel tel que $\ell n\, e = 1$

La fonction ℓn est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$: si $a < b$ alors $\ell n\, a < \ell n\, b$
$x > 1 \iff \ell n\, x > 0$ et $0 < x < 1 \iff \ell n\, x < 0$

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée $\ell n\,(u)$ est dérivable sur I et on a : $(\ell n\,(u))' = \frac{u'}{u}$

Toute fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ell n\,|u|$ sur tout intervalle dans lequel u ne s'annule pas. Si u est strictement positive, $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ell n(u)$.

Relation fonctionnelle

a et b étant deux réels strictement positifs, on a :

$\ell n\,(a \times b) = \ell n\, a + \ell n\, b$ $\qquad$ $\ell n(a^n) = n\, \ell n\, a$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$\ell n \left(\frac{1}{a}\right) = -\, \ell n\, a$ $\qquad$ $\ell n \left(\frac{a}{b}\right) = \ell n\, a - \ell n\, b$

$\ell n \sqrt{a} = \frac{1}{2}\, \ell n\, a$

Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des réels strictement positifs, on a :
$\ell n\,(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n) = \ell n\, a_1 + \ell n\, a_2 + \dots + \ell n\, a_n$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ell n\,(e^x) = x$

Limites - Variations

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell n\, x = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ell n\, x = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\, \ell n\, x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ell n\,(1+x)}{x} = 1$

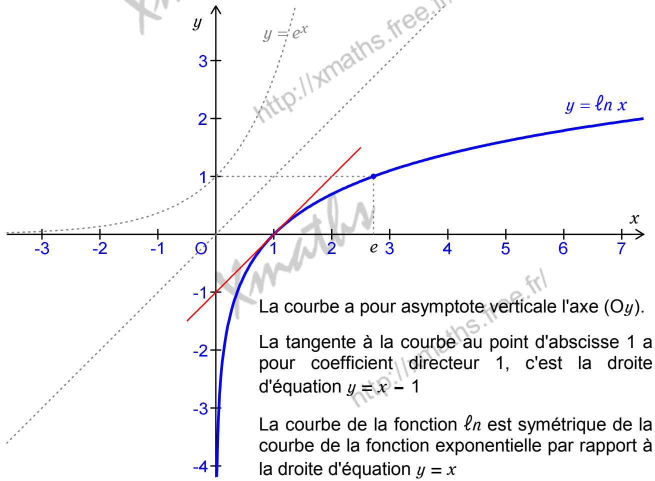
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ell n\, x}{x} = 0$; et pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ell n\, x}{x^n} = 0$

Tableau de variations

x	0		$+\infty$
ℓn	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

On dit que le nombre réel e tel que $\ell n\, e = 1$ est la base du logarithme népérien.
On a $e \approx 2{,}72$

Courbe représentative



La courbe a pour asymptote verticale l'axe (Oy).

La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 1, c'est la droite d'équation $y = x - 1$

La courbe de la fonction ℓn est symétrique de la courbe de la fonction exponentielle par rapport à la droite d'équation $y = x$

Fonction exponentielle

Définition - Propriétés

Pour tout réel x, on appelle exponentielle de x et on note $exp(x)$ ou e^x l'unique réel de $]0\,;+\infty[$ dont le logarithme népérien est x.

On appelle fonction exponentielle la fonction $exp : \mathbb{R} \to]0;+\infty[$
$x \mapsto exp(x) = e^x$

La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction ℓn

$$\left.\begin{matrix} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = \ell n\, y \\ y \in]0\,;+\infty[\end{matrix}\right.$$

Pour tout réel x , on a : $\ell n\,(e^x) = x$

Pour tout réel strictement positif x , on a : $e^{\ell n\, x} = x$

La fonction exponentielle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$

$e^0 = 1$ $\quad e^1 = e$

Pour tout réel x, on a $e^x > 0$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: si $a < b$ alors $e^a < e^b$

$x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$ et $x < 0 \Leftrightarrow 0 < e^x < 1$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, la fonction composée $exp\,(u)$ est dérivable sur I et on a : $(exp\,(u))' = u' \times exp\,(u)$ ou encore $(e^u)' = u' \times e^u$

Toute fonction de la forme $u' \times e^u$ a pour primitive e^u

Relation fonctionnelle

a et b étant deux réels, on a :

$e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{na} = (e^a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

Limites - Variations

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\,e^{-x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,e^x = 0$.

Tableau de variations

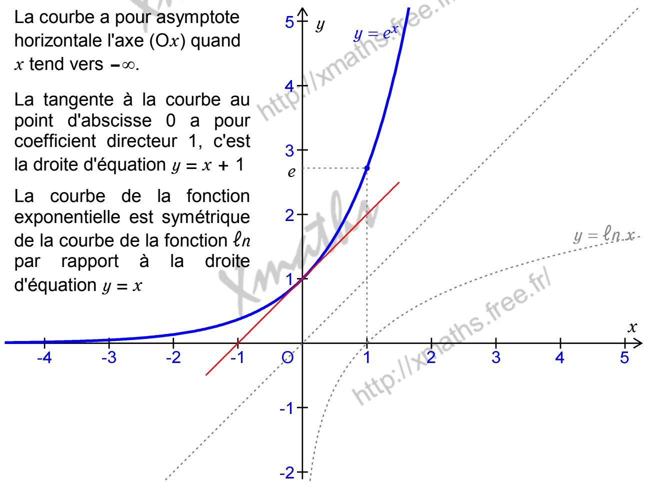
x	$-\infty$		$+\infty$
e^x		↗	$+\infty$
	0		

Courbe représentative

La courbe a pour asymptote horizontale l'axe (Ox) quand x tend vers $-\infty$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 1, c'est la droite d'équation $y = x + 1$

La courbe de la fonction exponentielle est symétrique de la courbe de la fonction ℓn par rapport à la droite d'équation $y = x$



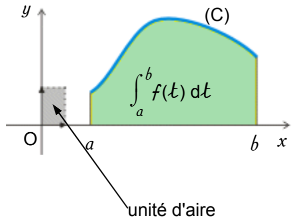
Intégrales

Définition - Interprétation graphique

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et (C) sa courbe dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est le réel mesurant l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$,

c'est-à-dire l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$

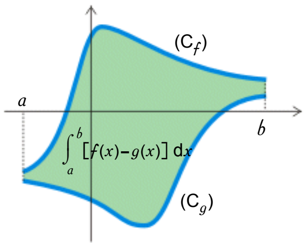


L'unité d'aire est le produit de l'unité sur l'axe (Ox) et de l'unité sur l'axe (Oy).

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ $(a < b)$ telles que, pour tout $x \in [a\ ;\ b]$: $g(x) \leqslant f(x)$.

L'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f et de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$,

c'est-à-dire l'ensemble des points M(x ; y) vérifiant $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ g(x) \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$ est donnée en unités d'aires par $\displaystyle\int_a^b (\,f(x) - g(x)\,)\,dx$



$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$.

On note aussi $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b$

Propriétés

f et g sont des fonctions ayant des primitives sur les intervalles considérés.

$\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$ $\qquad$ $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$ (Relation de Chasles)

$\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$

Si $k \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int_a^b (kf)(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt$

Si $a \leqslant b$ et si pour tout x de $[a\ ;\ b]$ on a $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

Si $a \leqslant b$ et si pour tout x de $[a\ ;\ b]$ on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

Valeur moyenne

On appelle valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$, le réel $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

Probabilités

Probabilités élémentaires

L'ensemble des éventualités (résultats possibles) d'une expérience aléatoire est appelé univers. Il est souvent noté Ω.
Un événement est une partie de Ω.

$\varnothing$ est l'événement impossible. Ω est l'événement certain.
$A \cup B$ est l'événement «A ou B». $A \cap B$ est l'événement «A et B».
Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont incompatibles (ou disjoints).
On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A .

On définit une loi de probabilité p sur $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ;...; \omega_n\}$ en associant à chaque éventualité ω_i un nombre réel p_i tel que :
pour tout $i \in \{1 ; 2 ; \cdots ; n\}$ $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ et $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$
p_i est la probabilité de l'éventualité ω_i . On note $p_i = p(\omega_i)$.
Pour tout événement $A = \{a_1 ; a_2 ; \cdots ; a_k\}$, la probabilité de A est :
$p(A) = p(a_1) + p(a_2) + \cdots + p(a_k)$.

- Pour tout événement A, $p(A) \in [0 ; 1]$
- $\overline{A}$ étant le contraire de A, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- Si A et B sont quelconques, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- Si A et B sont disjoints, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- Si A est contenu dans B, $p(A) \leqslant p(B)$
- Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont des événements deux à deux disjoints,
  $p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_k)$

Cas particulier

Si toutes les éventualités ont la même probabilité (éventualités équiprobables), la probabilité de chacune d'elles est alors $p = \dfrac{1}{\text{card}(\Omega)}$.

card(Ω) représente le nombre d'éléments de Ω, c'est-à-dire le nombre d'éventualités.

Dans ce cas, pour tout événement A, on a :

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Probabilités conditionnelles

A et B étant deux événements, on note $p_B(A)$, la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

On a : $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$

et si B est de probabilité non nulle $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

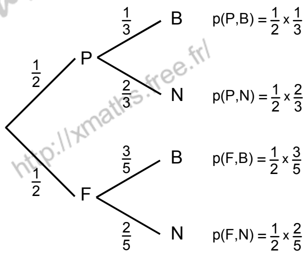
Deux événements A et B sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
(c'est-à-dire lorsque $p_B(A) = p(A)$ ou $p_A(B) = p(B)$)

Si $E_1 , E_2, \ldots , E_n$ est une partition de Ω
(c'est-à-dire un ensemble d'événements deux à deux disjoints dont la réunion est Ω)
Pour tout événement A, on a $p(A) = p(A \cap E_1) + p(A \cap E_2) + \ldots + p(A \cap E_n)$
ce qui s'écrit aussi $p(A) = p_{E_1}(A) \times p(E_1) + p_{E_2}(A) \times p(E_2) + \ldots + p_{E_n}(A) \times p(E_n)$
(lorsque les événements $E_1 , E_2 , \ldots , E_n$ sont de probabilité non nulle)

Arbres pondérés

Règles de construction
La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est 1.
La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités indiquées sur les différentes branches composant ce trajet.
En dehors des branches du premier niveau, les probabilités indiquées sont des probabilités conditionnelles.

<u>Exemple</u>
On jette une pièce.
Si on obtient pile (P), on tire une boule dans une urne contenant 3 boules dont 1 blanche (B) et 2 noires (N).
Si on obtient face (F), on tire une boule dans une urne contenant 5 boules dont 3 blanches (B) et 2 noires (N).
On peut représenter cette expérience par l'arbre pondéré ci-contre :



Espérance et variance d'une loi numérique

On considère une expérience aléatoire donnant un résultat numérique et la loi de probabilité associée, donnée par le tableau :

x_1	x_2	x_3			x_n
p_1	p_2	p_3			p_n

On appelle espérance mathématique de la loi de probabilité le nombre :

$$E = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \times p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n$$

On appelle variance de la loi de probabilité le nombre :

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E)^2 \times p_i = (x_1 - E)^2 \times p_1 + (x_2 - E)^2 \times p_2 + \dots + (x_n - E)^2 \times p_n$$

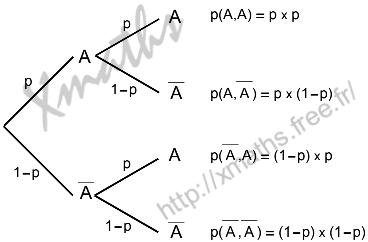
L'écart-type de la loi de probabilité est : $\sigma = \sqrt{V}$

Loi binomiale - Schéma de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve pouvant donner deux résultats :
le résultat A avec la probabilité p et le résultat $\overline{A}$ avec la probabilité $1 - p$.
Un schéma de Bernoulli, est la répétition n fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

La loi de probabilité du nombre de résultats A obtenus, est appelée loi binomiale de paramètres n et p.
La probabilité d'obtenir alors exactement k fois le résultat A (et donc $n - k$ fois le résultat $\overline{A}$) peut être donnée par un arbre de probabilités .

Exemple avec $n = 2$



Dans ce cas la probabilité d'obtenir exactement une fois le résultat A est :

$$p_1 = p(A,\overline{A}) + p(\overline{A},A) = p \times (1 - p) + (1 - p) \times p = 2p(1 - p)$$

XMaths

Fiches de cours

Terminale ES

Puissances réelles

Définition - Propriétés

Les puissances réelles d'un nombre strictement positif a sont définies par : $a^x = e^{x \ell n\, a}$ pour tout nombre réel x.

Pour tous réels strictement positifs a et b, et pour tous réels x et y, on a :

$\ell n\, a^x = x\, \ell n\, a$; $1^x = 1$

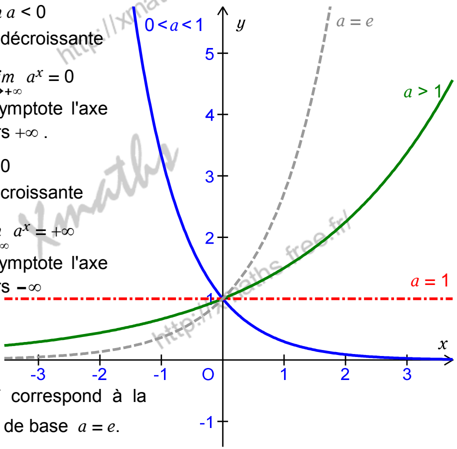
$a^{x+y} = a^x . a^y$; $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$; $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

$a^{x.y} = \left(a^x\right)^y$; $(a.b)^x = a^x . b^x$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

On appelle fonction exponentielle de base a ($a > 0$), la fonction : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x = e^{x \ell n\, a}$

L'étude de la fonction exponentielle de base a, se déduira facilement de l'étude de la fonction $x \mapsto e^x$ et du signe de $\ell n\, a$.

- Si $0 < a < 1$, on a $\ell n\, a < 0$
  la fonction $x \mapsto a^x$ est décroissante
  $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$
  La courbe a pour asymptote l'axe (Ox) quand x tend vers $+\infty$.
- Si $a > 1$, on a $\ell n\, a > 0$
  la fonction $x \mapsto a^x$ est croissante
  $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
  La courbe a pour asymptote l'axe (Ox) quand x tend vers $-\infty$



- La fonction $x \mapsto e^x$ correspond à la fonction exponentielle de base $a = e$.

Racine $n_{ième}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^{\frac{1}{n}}$ est le réel positif qui, élevé à la puissance n, donne a.

On dit que $a^{\frac{1}{n}}$ est la racine $n_{ième}$ de a. On note aussi $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

On a en particulier : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

La moyenne géométrique de n nombres réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$

est le nombre : $a = (a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n}$

Croissances comparées

Si $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n\, x}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$

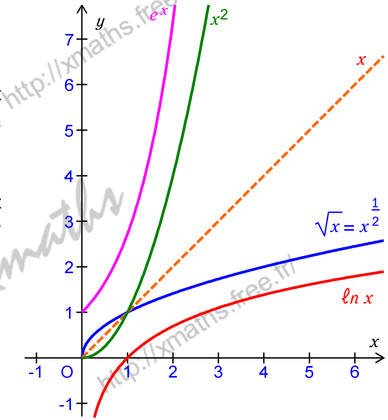
Lorsque x tend vers $+\infty$,

les fonctions $x \mapsto x^n$ croissent infiniment plus vite que la fonction ℓn.

(x^n l'emporte sur $\ell n\, x$)

la fonction exponentielle croît infiniment plus vite les fonctions $x \mapsto x^n$.

(e^x l'emporte sur x^n)



Si $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Statistiques

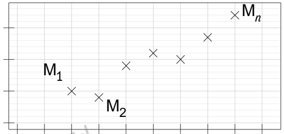
Statistiques à deux variables

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on appelle nuage de points associé à une série statistique à deux variables $(x_1 ; y_1)$; $(x_2 ; y_2)$; ... ; $(x_n ; y_n)$, l'ensemble des points : $M_1(x_1 ; y_1)$; $M_2(x_2 ; y_2)$; ... ; $M_n(x_n ; y_n)$.

Le point moyen de cette série est le point G de coordonnées ($\overline{x}$; $\overline{y}$) où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont les moyennes respectives des séries $x_1 ; x_2 ; ... x_n$ et $y_1 ; y_2 ; ... y_n$.

Lorsque le nuage de points a un aspect rectiligne, on peut procéder à un ajustement affine, c'est-à-dire que l'on assimile le nuage à une droite assez proche de tous ses points.

Un ajustement affine permettra de faire des interpolations ou des extrapolations.

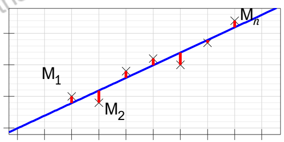


La droite d'ajustement d obtenue par la méthode des moindres carrés est une des droites les plus souvent utilisées.

Elle passe par le point moyen G et a pour coefficient directeur :

$$a = \frac{(x_1 - \overline{x})(y_1 - \overline{y}) + \dots + (x_n - \overline{x})(y_n - \overline{y})}{(x_1 - \overline{x})(x_1 - \overline{x}) + \dots + (x_n - \overline{x})(x_n - \overline{x})}$$

c'est-à-dire $a = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{(x_i - \overline{x})^2}$



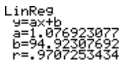
Cette droite a pour équation : $y = a(x - \overline{x}) + \overline{y}$

C'est la droite qui minimise la somme des carrés des distances des points du nuage aux points de même abscisse sur la droite.

L'équation de la droite d des moindres carrés peut être obtenue en utilisant les fonctions statistiques d'une calculatrice.

Elle est alors donnée sous la forme $y = ax + b$

La droite d est aussi appelée droite de régression de y en x .



Lorsque le nuage de points n'a pas un aspect suffisamment rectiligne, on procèdera parfois à une transformation des données (en utilisant une fonction connue : fonction carré ou racine carrée, fonction logarithme népérien, fonction exponentielle...) pour pouvoir ensuite procéder à un ajustement affine.

Adéquation à une loi équirépartie

Le problème se pose parfois de savoir si des données statistiques sont réparties de façon uniforme et si les variations que l'on observe par rapport à un modèle sont acceptables.

Exemple : Lorsqu'on jette un grand nombre de fois un dé dont les six faces sont numérotées, les nombres d'apparition des différentes faces ne sont pas en général égaux et on peut se demander si la variation observée d'une face à l'autre est une variation "normale" (appelée fluctuation d'échantillonnage) ou "anormale" (ce qui pourrait signifier que le dé n'est pas équilibré).

Pour cela on fera une comparaison de l'écart entre les résultats obtenus et le modèle donné par la théorie, avec l'écart entre des résultats simulés (avec une calculatrice ou un ordinateur) et le même modèle.

Supposons que les résultats obtenus sur un grand nombre de tirages sont donnés dans le tableau suivant :

Face i	1	2	3	4	5	6
Fréquence d'apparition f_i	0,2066	0,14	0,165	0,1866	0,1534	0,1484

La théorie pour un dé équilibré associe à chaque face une fréquence de $\frac{1}{6}$.

On mesure l'écart entre les résultats obtenus et le modèle donné par la théorie en calculant : $d^2_{obs} = \sum_{i=1}^{i=6} \left(f_i - \frac{1}{6}\right)^2$ c'est-à-dire

$$d^2_{obs} = \left(f_1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(f_2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(f_3 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(f_4 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(f_5 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(f_6 - \frac{1}{6}\right)^2$$

où $f_1, f_2, ..., f_6$ sont les fréquences données dans le tableau.

On obtient $d^2_{obs} \approx 0,0032$

En simulant un grand nombre de séries de tirages et en calculant pour chacune des séries le nombre d^2 correspondant, on obtient une série statistique pour laquelle le $9_{ème}$ décile est 0,003.

(C'est-à-dire que 90% des valeurs de d^2 sont inférieures ou égales à 0,003)

Sachant que $d^2_{obs} > 0,003$, on déclare que le dé n'est pas équilibré (ou que la série n'est pas équirépartie) au risque de 10% .

(Le $9_{ème}$ décile correspondant à 90 % des données le risque d'erreur est de 10%)

Si on avait obtenu $d^2_{obs} < 0,003$ on aurait déclaré le dé équilibré.

Remarque : Si on utilisait le $3_{ème}$ quartile de la série des d^2 simulés, on déclarerait un dé équilibré ou non équilibré au risque de 25% .

(Le $3_{ème}$ quartile correspondant à 75 % des données le risque d'erreur est de 25%)

Suites

Définition - monotonie

Une suite (u_n) de nombres réels peut être définie :

- par la donnée de son terme général u_n en fonction de n .

  Exemple : la suite (u_n) définie par $u_n = 400 \times (0{,}6)^n + 500$
- par la donnée de son premier terme et par une relation (appelée relation de récurrence) donnant u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier n.

  Exemple : la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Suites monotones

On dit que la suite (u_n) est croissante si : pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$

On dit que la suite (u_n) est décroissante si : pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$

On dit que la suite (u_n) est stationnaire (ou constante) si : pour tout n, $u_{n+1} = u_n$

(On peut de même définir une suite strictement croissante ou strictement décroissante)

On dit qu'une suite est monotone lorsqu'elle est croissante ou lorsqu'elle est décroissante.

Si la suite (u_n) est croissante et si $n \geqslant p$, alors $u_n \geqslant u_p$

Si la suite (u_n) est décroissante et si $n \geqslant p$, alors $u_n \leqslant u_p$

Suites arithmétiques - suites géométriques

Suite arithmétique

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite arithmétique de raison r lorsque :

pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n + r$

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite arithmétique de raison r.

- Pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $p \geqslant n_0$, on a $u_n = u_p + (n - p)r$

  en particulier : $u_n = u_0 + nr$; $u_n = u_1 + (n - 1)r$
- Sens de variation :

  Si $r = 0$, la suite (u_n) est stationnaire.

  Si $r \geqslant 0$, la suite (u_n) est croissante.

  Si $r \leqslant 0$, la suite (u_n) est décroissante.
- Si le premier terme de la suite est a, la somme des n premiers termes est :

$$S = na + \frac{n(n-1)}{2}r$$

Suite géométrique

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite géométrique de raison q lorsque :

pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n \times q$

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison $q > 0$.

- Pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $p \geqslant n_0$, on a $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$

  en particulier : $u_n = u_0 \times q^n$; $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
- Sens de variation :

  Pour une suite à termes positifs :

  Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est décroissante.

  Si $q = 1$, la suite (u_n) est stationnaire.

  Si $q > 1$, la suite (u_n) est croissante.
- Si le premier terme est a et si $q \neq 1$, la somme des n premiers termes est :

$$S = a\frac{1 - q^n}{1 - q}$$